

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con 3 ejercicios.

En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a 2 de un bloque y a 1 de cada bloque restante.

Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuestas a qué cuatro ejercicios se responde en el examen.

Todos los ejercicios valen 2.5 puntos, y en la mayoría de ellos dicha puntuación se desglosa con más detalle.

Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

El **tiempo** disponible para resolver el examen es de **una hora y media**.

Bloque 1. Álgebra y Programación Lineal.

1.1.– Usamos una balanza de brazos muy sensible para pesar tres tipos de piezas (A, B y C) comparando su peso con el de una barrita que sabemos que pesa 13 gramos. Todas las piezas de un mismo tipo pesan igual. Descubrimos que:

- (i) La barrita pesa lo mismo que una pieza C y dos piezas B juntas;
- (ii) tres piezas A pesan lo mismo que dos piezas B;
- (iii) una pieza C pesa lo mismo que dos piezas A y una pieza B.

¿Cuánto pesan las piezas de cada tipo? [1.75 puntos]

Si la relación (iii) hubiera sido que una pieza B pesa como dos piezas A y una pieza C, al resolver el problema nos daríamos cuenta de que alguna relación debería ser falsa. ¿Por qué? [0.75 puntos]

1.2.— Una matriz cuadrada A se dice *idempotente* si $A^2 = A$.

(i) Estudia si hay matrices idempotentes 2×2 que sean de la forma $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ o de la forma $\begin{pmatrix} 2 & b \\ a & 1 \end{pmatrix}$. En cada caso debes indicar, si la respuesta es afirmativa, el valor de a y b . [2 puntos]

(ii) Si una matriz A es idempotente, calcula su potencia A^{2022} . [0.5 puntos]

1.3.— Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) que cumplen

$$0 \leq y, \quad 0 \leq x,$$

$$x + y \leq 6,$$

$$2x + y \leq 10, \text{ y}$$

$$x + 2y \leq 10.$$

[1 punto]

Averigua el valor máximo que alcanza en dicha región la función dada por

$$f(x, y) = 4x + 3y.$$

[1 punto]

Si dicho valor máximo se alcanza en un punto (x_0, y_0) , ¿sabrías expresar una función cuyo máximo lo alcance en (y_0, x_0) ? [0.5 puntos]

Bloque 2. Análisis.

2.1.— Consideramos la función f dada (en los valores reales x donde la expresión tiene sentido) por

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x - 1}.$$

(i) ¿Cuál es el dominio de dicha función? [0.3 puntos]

(ii) Calcula la derivada $f'(x)$. ¿En qué puntos x es $f'(x) = -1$? ¿En cuáles es $f'(x) = 1$? ¿Tiene f extremos relativos? [1.1 puntos]

(iii) Dibuja la gráfica de f , señalando los cortes con los ejes y las asíntotas horizontales y verticales. [1.1 puntos]

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

cumpla las dos propiedades siguientes:

- (i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.
- (ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$.

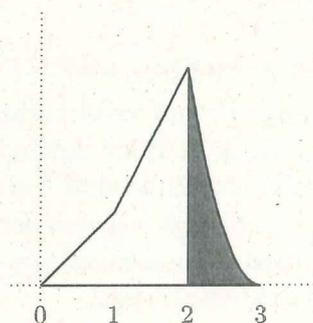
[1.75 puntos]

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1 ?

[0.75 puntos]

2.3.- El diseño del nuevo logo de Climbing Sports se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2x + a & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ b(x-3)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$



- (i) Calcula los valores de a y b . [1 punto]
- (ii) El material de la parte más oscura elevará el coste de producción de las prendas de la marca. ¿Cuánto vale el área de dicha parte? [1.5 puntos]

Bloque 3. Estadística y Probabilidad.

3.1.- Un amigo meteorólogo nos ha facilitado algunas probabilidades de lluvia en la mañana del próximo sábado, concretamente para los siguientes sucesos:

A = "hay lluvia entre las 8 y las 9";

B = "hay lluvia entre las 8 y las 10";

C = "hay lluvia entre las 10 y las 14".

Nos ha dicho que $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$ y $P(C) = 0.7$. A nosotros nos interesa sobre todo la probabilidad de $D =$ "hay lluvia entre las 9 y las 10". No nos la ha dado, pero nos ha dicho que $P(A \cap D) = 0.35$.

- (i) ¿Cómo interpretarías $P(B) - P(A)$? Calcula entonces el valor de $P(D)$. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva de 9 a 10? [1.5 puntos]
- (ii) Nos dice además que B y C son independientes, porque estará despejado entre las 10 y las 12. Calcula entonces la probabilidad de que llueva durante la mañana (entre las 8 y las 14). [1 punto]

3.2.— Al 40% de la población española no le gusta el vino. En España, de cada 1000 personas 7 son riojanas, pero entre quienes gustan del vino la proporción de personas riojanas es $1/120$.

Escogemos una persona española al azar y resulta que es riojana. ¿Cuál es la probabilidad de que le guste el vino? [2.5 puntos]

3.3.— En los poblados maruba utilizan el *punde* como medida de distancia, y toman lo largo de una valla para fijar su valor. Este es distinto en cada poblado. Queremos estimar el valor medio de los distintos pundes en metros, considerando que la distribución es normal con desviación típica de 4 metros y que las medidas en todos los poblados son independientes entre sí. A partir de una muestra de 25 pundes calculamos un intervalo de confianza para situar dicho valor medio, y resulta el intervalo (74.864, 77.496).

- (i) ¿Cuál es el valor promedio de nuestra muestra? [0.5 puntos]
- (ii) ¿Con qué nivel de confianza hemos obtenido el intervalo? [1.5 puntos]
- (iii) ¿Cuántos pundes necesitaríamos medir para reducir el error muestral a la mitad, con el mismo nivel de confianza? [0.5 puntos]

Tabla de la distribución normal estándar:

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997
4.0	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99997	0.99998	0.99998	0.99998	0.99998

CRITERIOS ESPECÍFICOS DE CORRECCIÓN

- (1.1) Se valorará por igual cualquiera de los métodos que se usen para resolver el sistema, aunque alguno resulte menos conveniente. La última pregunta se puede responder sin necesidad de resolver completamente el nuevo sistema, pero si se hace ese trabajo extra no se penalizará en puntuación.

Si el sistema que se plantea es erróneo pero se resuelve bien hay que valorarlo en su medida. Lo que no tiene mucha disculpa es resolver mal el sistema que se plantea, porque el estudiante debería verificar que su solución cumple las ecuaciones.

- (1.2) La puntuación debería ser la máxima aunque la expresión de la solución a la parte (ii) no sea técnicamente correcta (por inducción).

Una solución errónea en (i) es poco disculpable si no se comprueba que la matriz correspondiente es idempotente.

- (1.3) El argumento de simetría por el que se puede responder a la última pregunta debería ser razonablemente expresado, pero se puede valorar parcialmente en cualquier caso.

- (2.1) Aunque no se pide en el enunciado, se puede recompensar que se señale en la gráfica que en los puntos calculados la pendiente es -1 .

- (2.2) Cualquiera de las maneras de justificar el tipo de extremo que es -1 se debe valorar positivamente, aunque no se exprese con todo rigor.

Los errores en los cálculos de a y b son poco disculpables si no se verifica que dan solución a lo que se plantea.

- (2.3) Si en (i) se ha hallado un valor incorrecto de b , el resultado $b/3$ en (ii) se debería dar por válido (siempre que sea $b > 0$).

- (3.1) La primera pregunta de (i) se hace para facilitar la respuesta a lo que sigue: Si se responde bien a dicha pregunta la puntuación puede ser la máxima, aunque no se justifique totalmente por contenidos de sucesos y propiedades de una probabilidad.

- (3.3) Se puede asumir que el valor 1.645 es conocido de sobra, y entonces no es necesario recurrir a la tabla.

Es posible que alguien responda a (iii) sabiendo que en general tiene que cuadruplicar el tamaño de la muestra para reducir el error muestral a la mitad. Si lo dice claramente habría que darlo por válido.